Η ΕΞΙΣΩΣΗ $z^n=1$ ΣΤΟ $\mathbb{C}$

Ορισμός

Έστω $n\geq 2$ ακέραιος. Θέτουμε $\omega=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\in\mathbb{C}$

π.χ. $n=1\to\omega=1$

$n=2\to\omega=-1$, $n=3\to\omega=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$n=4\to\omega=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$

Ο n λέγεται Η ΑΡΧΙΚΗ n-ΣΤΗ ΡΙΖΑ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΟΣ

Πρόταση $\omega^n=1$

Απόδειξη Από τύπο de Moivre $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^n=\cos\left(\frac{2\pi n}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi n}{n}\right)=$

$=\cos(2\pi)+i\sin(2\pi)=1$

Ορισμός

Έστω $\nu \geq 1$ κ' $z \in \mathbb{C}$. Το z λέγεται ν-οστή ρίζα της μονάδας αν $z^{\nu}=1$

Πρόταση Έστω $\nu \geq 2$ κ' $\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}$ η αρχική ν-οστή ρίζα της μονάδας

Τότε το σύνολο $\{\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^{\nu-1}, \omega^{\nu}\}$ έχει ακριβώς ν στοιχεία κ' είναι το σύνολο λύσεων στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $z^{\nu}=1$.

Απόδειξη

Έστω r με $1 \leq r \leq \nu$. Τότε $(\omega^r)^{\nu} = \omega^{r\nu} = (\omega^{\nu})^r = 1^r = 1$. Άρα κάθε στοιχείο του συνόλου είναι ν-οστή ρίζα μονάδας. Τα υπόλοιπα είναι σχετικά εύκολα, αλλά δεν θα τα αποδείξουμε

Π.χ 2 ρίζες μονάδος: $1, -1$

3 ρίζες μονάδος. Θέτουμε $\omega = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Τότε $\omega^2 = \sigma\upsilon\nu 2\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu 2\frac{2\pi}{3} = \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3} + i\eta\mu\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\omega^3 = 1$

Συνεπώς, οι 3 ρίζες της μονάδος είναι $\{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\}$

Παρατηρούμε ότι είναι κορυφές κανονικού τριγώνου, δηλ. ισόπλευρου τριγώνου

Π.χ $\nu = 4$, $\omega = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$ κ' 4 ρίζες μονάδος κορυφές 4-γώνου

$\{\omega = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1\}$

Γενικά το σύνολο των ν-οστών ριζών στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης είναι κορυφές κανονικού ν-γώνου.

Έστω η εξίσωση $z^{\nu} = \alpha$ για $\alpha \in \mathbb{C}$

ΕΡΩΤΗΜΑ Έστω $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$. Βρείτε τις ρίζες στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $z^{\nu} = \alpha$ (όπου $\nu \geq 2$ ακέραιος)

Βήμα 1ο: Θέτουμε $\omega=\cos\frac{2\pi}{\nu}+i\sin\frac{2\pi}{\nu}$, δηλαδή ω είναι η αρχική ν-οστή ρίζα της μονάδος.

Βήμα 2ο: Γράφουμε τον α σε τριγωνομετρική μορφή $\alpha=|\alpha|(\cos\theta+i\sin\theta)$ με $\theta\in\mathbb{R}$

Βήμα 3ο: Θέτουμε $b=\left(|\alpha|^{\frac{1}{\nu}}\right)\left(\cos\frac{\theta}{\nu}+i\sin\frac{\theta}{\nu}\right)$

<u>Πρόταση</u> (χωρίς απόδειξη)

Οι λύσεις στο $\mathbb{C}$ της εξίσωσης $z^\nu=\alpha$ με $\alpha\in\mathbb{C}-\{0\}$ είναι ακριβώς ν το πλήθος, οι εξής:

$b\omega, b\omega^2, b\omega^3, \dots, b\omega^\nu$ ο b είναι ένας μιγαδικός που ικανοποιεί την εξίσωση $z^\nu=\alpha$

π.χ. Αφού $\omega^\nu=1$, $b\omega^\nu=b$

$(b\omega^r)^\nu=\overset{\alpha}{b^\nu}\overset{1}{(\omega^\nu)}^r=$
$=\alpha$

π.χ. (φυλλ 2, ασκ 12)

Να λύσετε, για $z\in\mathbb{C}$ την εξίσωση $z^\nu=-i$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Βήμα 1ο: Θέτουμε $\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Βήμα 2ο: Έχουμε ότι $|-i|=1$ κ' $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$

Βήμα 3ο: Θέτουμε $b=\left(|-i|^{\frac{1}{\nu}}\right)\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{2}}{3}\right)=\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=$

$=0+1\cdot i=i$

Συνεπώς οι ρίζες της $z^3=-1$ στο $\mathbb{C}$ είναι οι εξής:

$b\cdot\omega, b\omega^2, b\omega^2$ κ' $b\omega=i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$

$b\omega^2=i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ κ' $b\omega^3=b=i$

Πρόταση: Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ με $z_1 z_2 = 0$. Τότε $z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$

Απόδειξη: Έστω $z_1 \neq 0$ κ' $z_1 z_2 = 0$. ΝΔΟ $z_2 = 0$.
Πράγματι αφού $z_1 \neq 0$ έχουμε ότι ∃ ο $z_1^{-1} = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}$. Άρα $z_1 z_2 = 0 \Rightarrow$
$z_1^{-1} z_1 z_2 = z_1^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow 1 \cdot z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = 0$.

Πόρισμα: Έστω $n \geq 1$. Η εξίσωση $z^n = 0$ στο $\mathbb{C}$ έχει μοναδική λύση το 0.

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση έπεται άμεσα

Πόρισμα: Αν $n \geq 1$ ακέραιος κ' $a \in \mathbb{C}$ ∃ μιγαδικός z με $z^n = a$

Απόδειξη: Άλυτη

Παρατήρηση: Το αντίστοιχο στο $\mathbb{R}$ για n άρτιο κ' $a<0$ δεν ισχύει

Συμβολισμός: Έστω $a \in \mathbb{C}$. Συμβολίζουμε με $\sqrt{a}$ ένα μιγαδικό που ικανοποιεί την εξίσωση $z^2 = a$.

Πρόταση: Έστω $a, b, c \in \mathbb{C}$ με $a \neq 0$. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \text{για } z \in \mathbb{C}$$

Θέτουμε $\Delta = b^2 - 4ac$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις: $\rho_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ κ' $\rho_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Απόδειξη: $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + \frac{b}{a} z + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow z^2 + 2\frac{b}{2a} z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 -$

$- \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow$

(Από $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$)

$\Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$ ή $z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$